

## DU TUMULUS AU GRADIENT HORIZONTAL

PATRICE ORRO

À David, pour son soixantième anniversaire

### 1. RÉSUMÉ

Je voudrais, dans cet article, montrer l'inspiration et l'orientation que les échanges et la collaboration avec David ont eu sur une partie de mes travaux. En commençant par le tout début, via les tumulus, pour arriver à quelques résultats sur le gradient sous-riemannien.

Après un rapide rappel historique dans la section 2, la section 3 regroupe quelques résultats obtenus à travers l'étude des espaces conormaux et du cône normal sur des stratifications : notamment sur l'existence et la densité des fonctions de Morse sur un espace stratifié, la relation avec les espaces conormaux et la condition  $(b^*)$ , ainsi que les relations entre la dimension du cône normal et la pseudo-platitudo normale dans le cadre de stratifications  $(a + r^e)$ -régulières.

La section 4 porte sur le gradient en géométrie sous-riemannienne, et contient en particulier deux résultats sur le gradient horizontal : le premier est que, pour un polynôme générique  $f$ , l'ensemble  $V_f$  des points critiques horizontaux de  $f$  est un ensemble algébrique lisse de dimension 1, ou est vide, et la restriction  $f|_{V_f}$  est une fonction de Morse. Le second, toujours pour un polynôme générique  $f$ , indique que chaque trajectoire du gradient horizontal approchant  $V_f$  possède une limite.

### 2. INTRODUCTION

Les tumulus ou Barrow sont des petites surfaces utilisées à plusieurs occasions dans les travaux de David Trotman - ils sont présents dans sa thèse d'état, et sont apparus pour la première fois (pour moi) dans un article A. Kambouchner - D. Trotman [KT], "Whitney (a)-faults which are hard to detect" paru aux annales de l'ENS en 1979.

R. Thom dans son rapport sur la thèse d'état de D. Trotman indique que « Trotman a démontré [...] que cette condition (la condition (t)) était suffisante pour assurer (a) dans le cas des ensembles semi- et sous-analytiques, mais non pour les ensembles stratifiés  $C^\infty$  pour lesquels Trotman a construit des contre-exemples [...]. Dans ce but il utilise la notion de tumulus, notion qu'il a inventée. Ce sont des objets géométriques en forme de rides locales qu'on peut construire algébriquement ».

Mes recherches ont débutées, en thèse à Orsay avec David, par une étude des liens entre diverses conditions de régularités que l'on peut mettre sur une stratification et les fonctions de Morse stratifiées. Motivé en cela

- par les travaux de D. T. Lê et B. Teissier [LT],[Tei] en analytique complexe - qui montrent que  $(b)$  implique  $(b^*)$  - et ceux de V. Navarro et D. Trotman [NT] en réel -  $(w)$  implique  $(w^*)$  en sous-analytique et  $(b)$  implique  $(b^*)$  si la dimension de la petite strate est un,

- par les résultats de R. Pignoni [P] et les travaux de M. Goresky et R. Mac Pherson [GMP] sur la théorie de Morse stratifiée.

Nous avons de nombreuses discussions, et j'ai beaucoup profité de la connaissance impressionnante de David des publications dans des domaines variés allant de la théorie des stratifications

(mais c'est une évidence) à la robotique en passant par la théorie du contrôle, les diverses théorie géométriques, la physique mathématique, etc... partout où la théorie des singularités pouvait interagir.

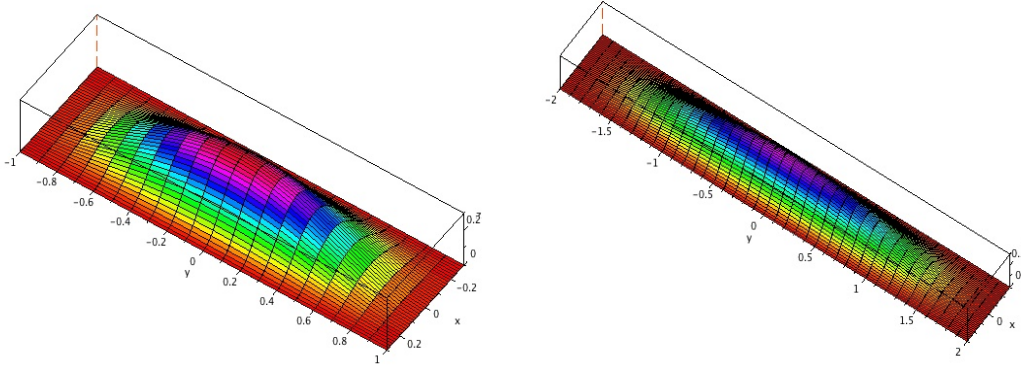
Trois articles que David m'avait indiqué à Orsay, puis à son arrivée à Marseille, me reviennent plus particulièrement à l'esprit, et ont beaucoup orienté une partie de mes travaux et collaborations futures : Subanalytic sets in the calculus of variations de M. Tamm [Tam]; Subanalytic sets and feedback control de H. J. Sussman [Sus1]; A new algebraic method for robot-motion-planning and real geometry de J. Canny [Can].

Ceux-ci mélangeaient la théorie de Morse, la propriété de Sard, l'utilisation de la théorie des ensembles semi- et sous-analytiques, des problèmes variés dans lesquels la théorie des espaces stratifiés pourrait apporter de nouvelles méthodes, la distance géodésique, les champs stratifiés, ... Leur influence se retrouve par exemple dans les articles [AOP1], [KO], [KOS], [O5], [J1] et dans [DKO] avec l'étude du gradient horizontal de fonctions polynomiales.

### 3. TUMULUS

Soient  $m$  et  $r$  deux réels strictement positifs, un tumulus de paramètres  $m, r$  est l'ensemble  $T_{m,r} = \{m^7 r^3 x_3 = (m^2 - x_2^2)^2 (m^2 r^2 - x_1^2)^2 : |x_2| \leq m, |x_1| \leq mr\}$ .

En voici deux illustrations :



Notant  $f(x, y, z)$  la fonction  $m^7 r^3 x_3 - (m^2 - x_2^2)^2 (m^2 r^2 - x_1^2)^2$  un petit calcul montre que

$$\nabla f = m^7 r^3 (4(1 - v^2)(1 - w^2)^2 v, 4(1 - v^2)^2 (1 - w^2) w r, 1)$$

où l'on a posé  $v = \frac{x_1}{mr}$  et  $w = \frac{x_2}{m}$ .

Lorsque  $r$  tend vers 0 la direction  $\langle \nabla f \rangle$  tend vers un élément de l'ensemble

$$\{(4(1 - \lambda^2)(1 - \mu^2)^2 \lambda, 0, 1) : \lambda, \mu \in [-1, 1]\}.$$

Rappelons qu'une fonction sur une stratification est de Morse, si sa restriction aux strates est de Morse, et si en un point  $y$  d'une strate  $Y$  le noyau de sa différentielle est transverse à toute limite d'espaces tangents à une strate  $X$  en une suite de points de  $X$  tendant vers  $y$ . A partir de cette notion de fonction de Morse sur un ensemble stratifié de Whitney, M. Goresky et R. MacPherson [GMP] ont donné les fondements d'une théorie de Morse stratifiée.

Il est très facile de voir que les fonctions de Morse ne sont pas denses en général, même sur un espace stratifié de Whitney - par exemple sur la spirale rapide  $\{(r, \theta) : r = e^{-t^2}, \theta = t(2\pi), t \geq 0\}$  il n'y a pas de fonctions de Morse.

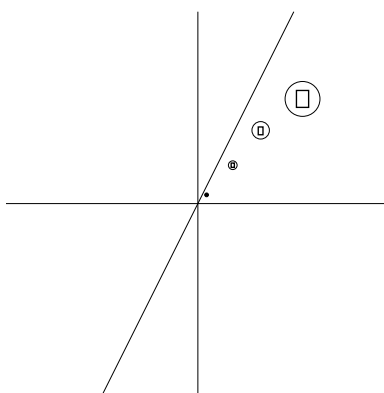
L'utilisation des tumulus a permis de construire dans [O1] une surface stratifiée vérifiant une condition de Whitney forte, tout en ayant un espace de tangents limites à l'origine de dimension

topologique 2. Ce qui donne un exemple non trivial de stratification sur laquelle les fonctions de Morse ne sont pas denses, voir aussi [P]; exemple généralisé à la classe  $C^q$  dans le second chapitre de ma thèse [O2].

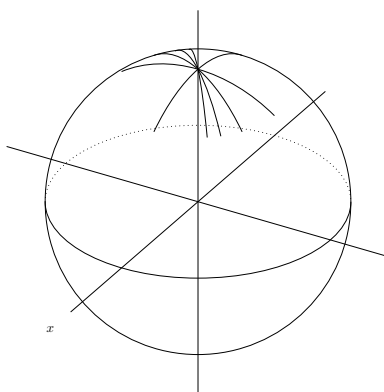
**Théorème 3.1.** [O1] *Il existe un espace stratifié fermé  $\mathcal{Z}$ , strictement whitney régulier, sur lequel les fonctions de Morse ne sont pas denses.*

*Idée de démonstration.* La structure normale des tumulus est reproduite à l'origine en y faisant arriver des suites de tumulus, tangentiellement à une famille dense de droites.

Le dessin ci-dessous montre une suite de cercles du plan  $Ox_1x_2$  convergeant vers  $O$  le long d'une de ces droites, et à l'intérieur desquels des tumulus sont positionnés.



Chaque droite avec sa suite de tumulus associée donne un arc de cercle sur la sphère en structure limite



voir [O1] pour la justification complète et le détail des calculs.

L'espace des limites de normales étant fermé, on obtient ainsi  $\mathcal{Z} = (S - \{0\}, \{0\})$  stratification telle que la fibre de Nash à l'origine  $\tau(\mathcal{Z}, 0)$  soit de dimension 2. □

Dans la catégorie sous-analytique les fonctions de Morse sont denses. Voir [P] dans le cas analytique, et [O2] et [O3] dans le cas sous-analytique et plus généralement dans le cas différentiel si l'espace conormal est "raisonnable".

La question de savoir quel type d'espaces de tangents limites on pouvait obtenir le long des strates d'une stratification s'était posée naturellement à la suite de [O1], [O2]. L'article [OT1] montre que les exemples de [O1] et [O2] peuvent être généralisés à l'aide des tumulus encore une fois :

**Théorème 3.2.** [OT1] *Pour tout compact étoilé  $K$  de  $P^2(\mathbb{R})$ , il existe une surface  $X$  de classe  $C^\infty$ , telle que  $X \cup \{0\}$  soit une stratification de Whitney homéomorphe à un disque, et dont la fibre de Nash à l'origine soit  $K$ .*

*Idée de démonstration.* La preuve se fait en prenant une suite  $\nu_i$  dense dans le bord de  $K$ , puis en faisant converger des tumulus légèrement modifiés de manière à ce que la structure limite corresponde à l'arc de cercle allant de  $\nu_i$  au pôle nord de la sphère. Encore un fois la fermeture de l'espace des limites de normales assure que  $K$  soit l'espace des limites de normales.  $\square$

Ce théorème implique en particulier l'existence de stratifications à fibre de Nash de dimension topologique 1 et de dimension de Hausdorff égale à 2 (ou  $1 + a$ , avec  $a$  compris entre 0 et 1) - et donne aussi un exemple de stratification ayant des espaces de tangents limites fractaux et par la même un exemple de front d'onde fractal. Ces résultats ont été étendus par M. Kwicinski et D. Trotman dans [KwT] qui ont montré que tout espace compact connexe de la grassmannienne peut être obtenu comme fibre de Nash d'une stratification de Whitney à singularité isolée.

**Théorème 3.3.** [KwT] *Let  $n \geq 2$  and  $d \leq n - 1$  be positive integers. For any  $K \in G_{n-d}^n$ , compact and connected, there exists  $\mathcal{Z} = (S - \{0\}, \{0\})$  smooth and Whitney stratified set such that  $\dim(S - \{0\}) = n - d$  and  $\tau(\mathcal{Z}, \{0\}) = K$ .*

Il est immédiat à partir des définitions que l'existence des fonctions de Morse stratifiées est liée au comportement des espaces tangents limites, de même que pour la condition  $(b^*)$ .

La condition  $(b^*)$  pour une stratification s'exprime comme suit. Définissons tout d'abord la notion d'aile : soit  $(X, Y)$  un couple de strates tel que  $Y \subset \bar{X} \subset \mathbb{R}^N$ ,  $q$  un entier compris entre 1 et  $\text{cod}(Y)$ ,  $1 \leq q < N - p$ , et  $y$  un point de  $Y$ .

Une **aile de codimension  $q$**  en  $y$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^N$  de codimension  $q$  contenant un voisinage de  $y$  dans  $Y$ . La topologie sur l'ensemble des ailes est induite par l'application  $f : W \rightarrow T_y W \in G_{N-p-q}(N-p)$

Nous dirons alors que  $(X, Y)$  est  **$b_{\text{cod}q}$ -régulier** en  $y$  s'il existe un ouvert dense  $U$  de l'espace des ailes de codimension  $q$  en  $y$  tel que :  $\forall W \in U \ W \dashv X$ <sup>1</sup> et  $(W \cap X, Y)$  est  $(b)$ -régulier en  $y$ . Nous dirons que  $(X, Y)$  est  **$b^*$ -régulier** en  $y$  si  $b_{\text{cod}q}$  est vérifiée en  $y$  pour tous les  $q$  entre 1 et  $N - p$ .

Aussi le lien entre ces deux problèmes se fait-il par les limites d'espaces tangents le long des strates. Les résultats de [O2], [O3], montrent les relations entre la densité des fonctions de Morse stratifiées et la condition  $(b_{\text{cod}1})$ .

À la suite de [O2] est apparu l'intérêt d'utiliser non pas les limites d'espaces tangents mais les limites d'hyperplans tangents, d'utilisation courante en géométrie complexe et qui était apparu à la fin de ma thèse en liaison avec les fonctions de Morse. L'introduction dans [OT2] d'un espace  $B_Y^1 X$  qui s'identifie au cône de Whitney dans le cas  $(b)$  régulier permet de donner une nouvelle preuve de l'existence de stratifications  $(b^*)$  - une autre était donnée dans [O2] - et ouvre la voie à une caractérisation complète de la condition  $(b^*)$  en terme de dimension du cône de Whitney, ce qui est réalisé dans [O4]. Quand au lien entre densité des fonctions de Morse, espaces conormaux et  $b_{\text{cod}1}$  il est donné par le théorème qui suit.

1. Si  $\dim X + \dim Y < N$ ,  $W \dashv X$  signifie  $W \cap X = \emptyset$

Rappelons tout d'abord ce qu'est l'espace conormal : soit  $(X, Y)$  un couple de strates tel que  $Y \subset \bar{X}$ , l'espace conormal de  $X$  le long de  $Y$  - noté  $W_Y(X)$  - est l'espace des limites d'hyperplans tangents à  $X$  le long de  $Y$  c'est à dire, en notant  $T_y X$  l'ensemble des limites en  $y$  d'espaces tangents à  $X$  :

$$W_Y(X) = \{(y, H) \in Y \times G_{N-1}^N : \exists T \in T_y X \quad T \subset H\}.$$

La fibre en  $y$  de la projection  $W_Y(X) \rightarrow Y$  est notée  $W_y(X)$ .

**Théorème 3.4.** [O3] *Soient  $\Sigma$  une stratification (b)-régulière à espaces conormaux non fractal, alors on a équivalence de :*

- (i) *les fonctions de Morse sont denses dans  $C^k(|\Sigma|)$*
- (ii)  *$\forall X, Y \in \Sigma$  tel que  $Y \subset \bar{X}$  l'ensemble  $\{y \in Y : \dim_h W_y X < N - \dim Y - 1\}$  est dense dans  $Y$ .*
- (iii)  *$\forall X, Y \in \Sigma$  tel que  $Y \subset \bar{X}$  l'ensemble  $\{y \in Y : (X, Y) \text{ est } b_{cod1} \text{-régulier en } y\}$  est dense dans  $Y$ .*

Les tumulus refont un apparition dans un article de 2002 [OT4] sur les cônes normaux. Si  $A$  est un sous-ensemble et  $Y$  une sous-variété de  $\mathbb{R}^n$ , le cône normal de  $A$  le long de  $Y$  peut être vu comme le diviseur exceptionnel de l'éclatement sphérique de  $A$  le long de  $Y$ .

La condition  $b^*$  est aussi liée au comportement de la multiplicité le long des strates ou plutôt, travaillant essentiellement en réel, avec la fonction de densité (voir [KR] ou la thèse de G. Comte [Com]). Ceci est une autre motivation pour l'étude du cône normal à une stratification, l'article [OT3] donne en particulier un contrôle de la dimension du cône normal - espace des limites de directions normales - à une stratification sous-analytique ou  $(w + \delta)$ -régulière.

Tout d'abord rappelons les définitions des conditions  $(n)$  et  $(ppn)$  :

Soit  $\mathcal{Z}$  un fermé stratifié de  $\mathbb{R}^n$ . Pour chaque strate  $Y$  de  $\mathcal{Z}$  on note  $C_Y \mathcal{Z}$  le cône normal de  $\mathcal{Z}$  le long de  $Y$ , c'est à dire la restriction au-dessus de  $Y$  de l'adhérence de l'ensemble

$$\{(x, \mu(x\pi(x))) : x \in \mathcal{Z} - Y\} \subset \mathbb{R}^n \times S^{n-1},$$

où  $\pi$  est la projection canonique locale sur  $Y$ , et  $\mu(x)$  le vecteur unitaire  $\frac{x}{\|x\|}$ . Notons  $p_1$  la projection  $C_Y(\mathcal{Z}) \rightarrow Y$ .

Condition  $(n)$  : La fibre  $(C_Y \mathcal{Z})_y$  de  $p_1$  en un point  $y$  de  $Y$  est le cône tangent  $C_y(\mathcal{Z}_y)$  à la fibre  $\mathcal{Z}_y = \mathcal{Z} \cap \pi^{-1}(y)$  de  $\mathcal{Z}$  en  $y$ .

Condition de pseudo-platitude normale  $(ppn)$  : La projection  $p : C_Y \mathcal{Z} \rightarrow Y$  est ouverte pour toute strate  $Y$  de  $\mathcal{Z}$ .

Les stratifications sous-analytiques vérifiant les conditions  $(a+n)$  ou  $(ppn)$  ont un cône normal ayant un bon comportement du point de vue de la dimension des fibres. En effet elles vérifient la condition

$$\dim(C_Y \mathcal{Z})_y \leq \dim \mathcal{Z} - \dim Y - 1.$$

voir [OT3] et [OT4].

Le cône tangent  $C_y(\mathcal{Z}_y)$  à la fibre  $\mathcal{Z}_y = \mathcal{Z} \cap \pi^{-1}(y)$  (et donc la fibre  $(C_Y \mathcal{Z})_y$  du cône normal, supposant  $(n)$ ) peut être assez arbitraire : des travaux de Ferrarotti, Fortuna et Wilson montrent que tout cône semi-algébrique fermé de codimension  $\geq 1$  est réalisé comme le cône tangent en un point d'une certaine variété algébrique réelle [FFW], et comme déjà indiqué *tout* cône fermé est réalisé comme le cône tangent en une singularité isolée d'un certain espace stratifié  $C^\infty(b)$ -régulier [KwT].

Les premiers résultats dans la direction de l'étude de  $(n)$  et  $(ppn)$  ont été obtenus par H. Hironaka, qui montre dans [Hir] qu'une stratification de Whitney d'un ensemble analytique (réel ou complexe) est normalement pseudo-plate le long de chaque strate. J. P. Henry et M. Merle, dans [HM2], ont montré l'ouverture de la projection du cône normal d'une strate  $X$  le long d'une strate  $Y$ , où  $X$  et  $Y$  sont des strates adjacentes d'une stratification de Whitney sous-analytique.

Le théorème suivant extrait de [OT4] montre que  $(n)$  est vérifiée par toute stratification différentiable  $(a)$ -régulière ayant en plus une régularité  $(r^e)$  de type Kuo-Verdier : pour  $0 \leq e < 1$ ,  $A$  vérifie la condition  $r^e$ , en  $y$  relativement à  $Y$ , si pour  $x$  dans  $A$  la quantité  $R_e(x) = \|\pi(x)\|^e d(T_x A, T_{\pi(x)} Y) / \|x\pi(x)\|$  est bornée près de  $y$  -  $\pi$  est la projection locale sur  $Y$ . Cette condition n'est autre que  $(w)$  pour  $e = 0$ , et est une variation de la condition de Kuo [Kuo].

**Théorème 3.5.** [OT4] *Soit  $A$  un fermé, stratifié par des variétés de classe  $C^{k \geq 2}$  de manière  $(a + r^e)$ -régulière relativement à une strate  $Y$ . Alors  $C_y(A_y) = (C_Y A)_y$ , pour tout point  $y$  de  $Y$ , c'est-à-dire que  $(n)$  est vérifiée.*

Toute stratification  $C^2$   $(w)$ -régulière vérifie automatiquement  $(a)$  et  $(r^e)$ , c'est-à-dire  $(a + r^e)$ . Pour des strates sous-analytiques la combinaison  $(a + r^e)$  est équivalente au critère  $(r)$  introduit par T.-C. Kuo en 1971, ce qui entraîne la condition  $(b)$  de Whitney [Kuo]; on sait depuis [T1] que  $(r)$  est strictement plus faible que  $(w)$  dans le cas semi-algébrique, et il existe même des exemples algébriques réels. L'équivalence de  $(b)$ ,  $(r)$  et  $(w)$  pour les stratifications analytiques complexes est connue depuis 1982 ([Tei], [HM2]).

Les stratifications  $(a + r^e)$ -régulière vérifient aussi la pseudo-platitudo normale [OT4]

**Théorème 3.6.** [OT4] *Sous les hypothèses du théorème précédent, la projection de  $C_Y \mathcal{Z}$  dans  $Y$  est ouverte, i.e.  $\mathcal{Z}$  est normalement pseudo-plate le long de  $Y$ .*

L'exemple d'un "escargot de Kuo", déjà utilisé dans [OT3], montre qu'une stratification différentiable  $(b)$ -régulière ne vérifie pas forcément  $(n)$  ou  $(ppn)$ . Les deux exemples qui suivent sont construits à l'aide des tumulus.

**Exemple 1.**  $(w_\beta)$ ,  $(n)$  et tumulus.

Si l'on affaiblit  $(w)$  en  $(w_\beta)$ ,  $\beta < 1$ , c'est-à-dire si on suppose que le rapport  $\frac{d(T_x X, T_z Y)}{\|x - \pi(x)\|^\beta}$  est borné près de  $y$  pour  $x$  dans  $X$  et  $z$  dans  $Y$ , alors la condition  $(n)$  n'est pas vérifiée.

Considérons pour cela le demi-plan  $x_3 = 0, x_1 > 0$  dans  $\mathbb{R}^3$ , et notons  $C_\alpha$  le morceau de courbe  $\{x_1 = x_2^{\frac{2+\alpha}{\alpha}}, x_1 > 0\}$ , qui est tangent à  $(0x_2)$ . Centrons aux points  $(x_1^i, x_2^i, 0) = (r_i^{1+\alpha}, r_i^{\frac{\alpha(1+\alpha)}{2+\alpha}}, 0)$  des tumulus  $T_{r_i^\alpha, r_i}$ , avec une suite  $r_i$  qui tend vers 0 de sorte que les tumulus soient disjoints.

Alors, si l'on note  $X$  le demi-plan perturbé le long de  $C_\alpha$  et  $Y = (0x_2)$ , on obtient une stratification  $(w_{\frac{1}{1+\alpha}})$ -régulière, pour laquelle le cône normal n'est pas obtenu dans la fibre. En effet, en notant  $\pi$  la projection sur  $Y$ , et en notant

$$\xi = \frac{x_1 - x_1^i}{r_i^{1+\alpha}} \quad \text{et} \quad \chi = \frac{x_2 - x_2^i}{r_i^\alpha}$$

sur les tumulus, nous avons que

$$\|x - \pi(x)\| \equiv \frac{3}{2} r_i^{1+\alpha}, \quad \text{et} \quad d(T_x X, Y) \equiv -4\chi(\chi^2 - 1)(\xi^2 - 1)^2 r_i,$$

de sorte que

$$\frac{d(T_x X, Y)}{\|x - \pi(x)\|^\beta} \leq \text{Cte}, \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{1}{1+\alpha},$$

c'est-à-dire que la stratification obtenue est  $(w_\beta)$ -régulière. De plus les fibres du cône tangent le long de  $Y$  sont des points, sauf en 0 où l'on a une courbe, étant donné que l'angle des sécantes passant par le sommet des tumulus a une ouverture constante (la tangente de cet angle est  $\frac{2}{3}$ ). Il est clair par la construction que les limites des sécantes en 0 ne sont pas obtenues dans la fibre de  $\pi$ , c'est-à-dire que la condition  $(n)$  n'est pas vérifiée.

Les strates telles qu'elles sont données sont de classe  $C^1$ , mais elles peuvent être lissées sans difficulté de manière à obtenir des stratifications  $C^2$  ayant les mêmes propriétés.

**Exemple 2.**  $(a + n)$  n'implique pas  $(ppn)$  avec tumulus.

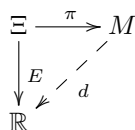
L'exemple précédent peut être modifié de sorte que la stratification obtenue soit  $(a)$ -régulière et que le cône normal soit obtenu dans la fibre en 0 de la projection sur  $Y$ .

En effet, centrons une suite de tumulus  $T_{m_i, m_i}$  aux points  $(m_i^2, 0)$  de l'axe  $(0x)$ , où  $m_i \rightarrow 0$  et les  $m_i$  soient tels que les tumulus ne se rencontrent pas. Notons encore  $X$  la surface obtenue, et  $Y = (0y)$ . Les tumulus donnent naissance à un cône tangent limite en 0 de dimension 1, provenant de suites de points situés sur l'axe  $(0x)$ . Les fibres du cône tangent le long de  $Y = (0y)$  sont encore des points sauf en 0, où la fibre est de dimension 1, et la projection n'est donc pas ouverte. La condition  $(a)$  est vérifiée - il suffit de constater que les normales limites en 0 sont dans le plan  $(0xz)$ .

G. Valette et David Trotman ont observé par ailleurs comment construire un exemple algébrique de stratification  $(a + n)$ -régulière ne vérifiant pas  $(ppn)$  : considérer la surface donnée en coordonnées cylindriques par  $\{r = (z^2 + \sin^2 \theta) \cos \theta\}$ .

#### 4. VERS LE GRADIENT HORIZONTAL

Dans [Tam], M. Tamm donne des conditions pour que -  $\Xi$  étant une variété hilbertienne,  $\pi$  et  $E$  deux applications à valeurs respectivement dans une variété riemannienne  $M$  et dans  $\mathbb{R}$  - la fonction  $d(x) = \inf\{E(\xi) : \xi \in \pi^{-1}(x)\}$  soit sous-analytique.



Ce résultat a été un des éléments déclencheurs de mes travaux en géométrie sous-riemannienne : appliqué dans le cas riemannien il donne une démonstration de la sous-analyticité de la distance géodésique riemannienne, mais il ne s'applique pas dans le cas des espaces stratifiés ou dans le cas sous-riemannien. Une extension de ce théorème nécessite une étude de l'espace des chemins horizontaux et des singularités des applications extrémités et énergie.

Dans ces directions j'ai codirigé plusieurs thèses dont celle de M. Alcheik soutenue en 1995, avait pour objectif principal une étude de l'espace des chemins horizontaux et une première approche des singularités de ces applications ; celle de S. Jacquet soutenue en 1997, une généralisation du théorème de Tamm et la sous-analyticité de la distance sous-riemannienne ; et celle de S. T. Dinh soutenue en 2007 sur le gradient horizontal de fonctions polynomiales. Je terminerai ce voyage dans le passé de la collaboration avec David en donnant quelques éléments de ce dernier travail, qui montre bien l'utilisation conjointe de la théorie des singularités, stratifications, sous-analytique et sous-riemannien.

Rappelons tout d'abord quelques éléments de géométrie sous-riemannienne :  $\Delta$  désigne une distribution de rang constant sur une variété riemannienne  $M$  de dimension  $n$ . Un chemin horizontal est une courbe tangente à  $\Delta$  de classe de Sobolev  $W^{1,2}$  de  $I = [0, 1]$  dans  $M$ , c'est à dire

absolument continue et d'énergie  $\int_0^1 |\dot{\gamma}(t)|^2 dt$  finie. L'espace de ces chemins sera noté  $\Omega(\Delta)$ , si  $\Delta = TM$  l'espace  $\Omega(\Delta)$  est l'espace  $\Omega(M)$  des chemins sur  $M$ .

Soient  $\sigma$  l'application origine  $\gamma \in \Omega(\Delta) \rightarrow \gamma(0) \in M$  et  $\pi$  l'application extrémité, qui à  $\gamma \in \Omega(\Delta)$  associe  $\gamma(1) \in M$ . L'espace  $\Omega(\Delta)$  est une sous-variété hilbertienne de  $\Omega(M)$ , si  $a$  est un point de  $M$  l'image réciproque  $\sigma^{-1}(a) = \Omega_a(\Delta)$  est une sous-variété de  $\Omega(\Delta)$ , l'application  $\sigma$  étant partout une submersion. L'application  $\pi : \Omega_a(\Delta) \rightarrow M$  quant à elle n'est pas toujours une submersion, ses points critiques sont les chemins anormaux. Différentes caractérisations de ces chemins peuvent être trouvées dans la littérature, les chemins anormaux ont aussi beaucoup été étudiés en dimension 2 en liaison avec le problème de rigidité.

Considérons donc une variété analytique  $M$  de dimension  $n$ , et une distribution analytique  $\Delta$  de dimension  $p < n$  sur  $M$ , c'est-à-dire un sous-fibré analytique de dimension  $p$  du fibré tangent  $TM$ , muni d'une métrique analytique  $g_{SR}$  sur  $\Delta$ , appelée métrique sous-riemannienne ou de Carnot - Carathéodory. On suppose aussi que  $\Delta$  vérifie la condition d'Hörmander, ce qui implique que la distribution est non-intégrable. Soient  $X_1, \dots, X_p$ , des champs de vecteurs analytique orthonormés qui engendrent (localement)  $\Delta$ , on définit le gradient horizontal d'une fonction  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  par

$$\nabla^h f = \sum_{i=1}^p (X_i f) X_i.$$

On désigne par  $V_f = \{\nabla^h f = 0\}$  l'ensemble des points critiques horizontaux de  $f$ .

**Théorème 4.1.** *Pour un polynôme  $f$  générique,  $V_f$  est un ensemble algébrique lisse de dimension 1 ou est vide, c-à-d qu'il existe un ensemble  $L_d \subset \mathbb{R}_d[x]$ , semi-algébrique ouvert et dense, tel que  $V_f$  est lisse de dimension 1 ou est vide, pour tout  $f \in L_d$ . De plus, pour tout  $f$  de  $L_d$  la fonction  $f|_{V_f}$  est de Morse.*

*Idee de démonstration.* Considérons  $\bar{j}f(x) = (x, d_x f)$ . Si  $\Delta^0 \subset T^*M$  désigne l'orthogonal de la distribution, on a que  $x \in V_f$  si et seulement si  $\bar{j}f(x) \in \Delta^0$ .

Posons  $L(x, f) = \bar{j}f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_d[x] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ . Une application du théorème de transversalité montre que  $\{f \in \mathbb{R}_d[x] : L_f = L(\cdot, f) \uparrow \Delta^0\}$  est dense et que  $V_f = (\bar{j}f)^{-1}(\Delta^0)$  est de dimension 1. Montrer que  $f|_{V_f}$  est de Morse est plus complexe et nécessite d'imposer d'autres conditions, suffisamment fines pour conserver la généricité. Voir [DKO] pour des précisions sur le type de distribution notamment et pour une démonstration complète.  $\square$

L'inégalité de Łojasiewicz n'est pas valide pour le gradient horizontal, comme le montre l'exemple suivant : le gradient horizontal du polynôme  $f = 2x_3$  pour la distribution d'Heisenberg, engendrée par les deux champs de vecteurs orthonormés pour la métrique sous-riemannienne

$$(1) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{1}{2} x_1 \frac{\partial}{\partial x_3}. \end{cases}$$

est  $\nabla^h f = -x_2 X_1 + x_1 X_2$ . Ainsi  $V_f$  est l'axe  $x_3$ , et, puisque la restriction de  $f$  à  $V_f$  n'est pas constante, en effet  $f(V_f) = \mathbb{R}$ , l'inégalité de Łojasiewicz n'est pas vérifiée.

Une deuxième observation est qu'une trajectoire du gradient horizontal peut être de longueur infinie, et peut même s'accumuler sur une courbe fermée.



Toutefois ces comportements sont exceptionnels dans un certain sens, et pour une fonction générique  $f$ , les trajectoires de son gradient horizontal ont des propriétés similaires au cas du gradient riemannien voir [DKO] pour plus de détails.

Donnons un autre résultat significatif extrait du même article :

**Théorème 4.2.** *Soit un  $f \in \mathbb{R}_d[x]$  un polynôme générique, précisément supposons que  $f \in L_d$ , ouvert dense semi-algébrique donné par le théorème 4.1. Soient  $B \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble compact et  $x(t) \subset B$  une trajectoire de  $\nabla^h f$ . Supposons que  $x(t)$  s'approche de  $V_f$ , c-à-d qu'il existe une suite  $t_m \rightarrow t_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  telle que  $d_{V_f}(x(t_m)) \rightarrow 0$ . Alors  $x(t)$  a une limite appartenant à  $V_f \cap B$  : il existe  $x_0 \in V_f \cap B$  tel que*

$$\text{dist}_R(x(t), x_0) \rightarrow 0 \text{ quand } t \rightarrow t_0$$

où  $\text{dist}_R$  est une distance riemannienne.

Les deux exemples finaux illustrent la différence de comportement du gradient horizontal (sous-riemannien) par rapport au gradient riemannien.

**Exemple 3.** *Plaçons nous dans  $\mathbb{R}^3$  où l'on considère la distribution d'Heisenberg, et le polynôme  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_3$ . Le gradient horizontal de  $f$  s'écrit*

$$\nabla^h f = X_1 f X_1 + X_2 f X_2 = -x_2 X_1 + x_1 X_2.$$

*L'ensemble des points critiques horizontaux  $V_f$  de  $f$  est l'axe  $x_3$ . Donc la généricité de dimension 1 de  $V_f$ , et la généricité sur la finitude de l'intersection de  $V_f$  avec une surface de niveau de  $f$  sont satisfaites.*

*Les trajectoires de  $\nabla^h f$  sont déterminées par le système*

$$(2) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = -\frac{1}{2}x_2(-x_2) + \frac{1}{2}x_1x_1 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$$

*En résolvant ce système, nous obtenons*

$$x_1 = r \cos(t) + c \sin(t)$$

où  $r, c$  sont des constantes.

*Prenons  $c = 0$ , on a  $x_1 = r \cos(t)$ ,  $x_2 = r \sin(t)$  et  $x_3 = \frac{1}{2}r^2 t + C$  où  $C$  est une constante, ainsi avec  $C = 0$  nous avons  $x_3 = \frac{1}{2}r^2 t$*

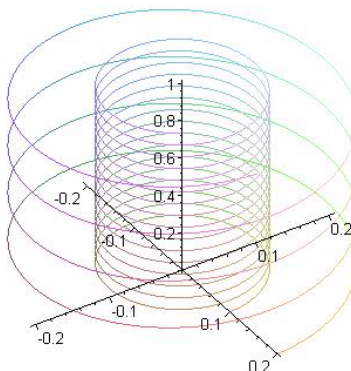
*Calculons la longueur des trajectoires contenues dans la boîte*

$$B = \left\{ -\frac{1}{2} \leq x_1 \leq \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \leq x_2 \leq \frac{1}{2}, 0 \leq x_3 \leq 1 \right\}$$

*Soit  $t$  un temps pour lequel une trajectoire reste encore dans la boîte, on a  $0 \leq x_3 = \frac{1}{2}r^2 t \leq 1$ , donc  $0 \leq t \leq \frac{2}{r^2}$ , donc la longueur de toute trajectoire de  $\nabla^h f$  dans  $B$  contenue dans le cylindre  $\{x_1^2 + x_2^2 = r^2\}$  est*

$$L(r) = \int_0^{\frac{2}{r^2}} \|\nabla^h f(x(t))\| dt = \int_0^{\frac{2}{r^2}} \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t)} dt = \int_0^{\frac{2}{r^2}} r dt = \frac{2}{r}.$$

*Puisque  $r$  est la distance à l'axe  $x_3$ , la longueur des trajectoires du gradient n'est pas bornée uniformément dans cette boîte. En effet, la longueur devient de plus en plus grande quand la trajectoire s'approche de l'axe  $x_3$ . La vitesse de montée est plus petite que celle de rotation.*



Dans cet exemple, les trajectoires de  $\nabla^h f$  n'ont pas de points limites sur l'axe  $x_3$ .

**Exemple 4.** On considère la distribution d'Heisenberg dans  $\mathbb{R}^3$  et le polynôme

$$f(x) = 2x_3 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

Le gradient horizontal de  $f$  est égale à  $\nabla^h f = X_1 f X_1 + X_2 f X_2$  où  $X_1 f = x_1 - x_2$ ,  $X_2 f = x_1 + x_2$ . L'ensemble des points critiques horizontaux de  $f$  est l'axe  $x_3$ . Les trajectoires de  $\nabla^h f$  satisfont le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2). \end{cases}$$

En résolvant les deux premières équations, on obtient

$$\begin{cases} x_1(t) = e^t(a \sin(t) + b \cos(t)) \\ x_2(t) = e^t(-a \cos(t) + b \sin(t)) \end{cases}$$

où  $a, b$  sont des constantes. Alors  $\dot{x}_3 = \frac{(a^2 + b^2)}{2} e^{2t}$ , donc

$$x_3 = \frac{(a^2 + b^2)}{4} e^{2t} + c$$

où  $c$  est une constante. On remarque que toutes les trajectoires de  $\nabla^h f$  possèdent une limite (quand  $t \rightarrow -\infty$ ) sur l'axe  $x_3$ , qui est l'ensemble des points critiques horizontaux de  $f$ . Quand  $t \rightarrow +\infty$ , les trajectoires de  $\nabla^h f$  s'éloignent de l'axe  $x_3$  de manière exponentielle, donc, dans un compact, les trajectoires de  $\nabla^h f$  possèdent au plus un point limite sur l'axe  $x_3$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [AOP2] M. Alcheik, P. Orro et F. Pelletier, *Characterizations of Hamiltonian geodesics in subRiemannian geometry*, J. of Cont. Theory and Dyn. Sys., vol. 3, num. 3, 1997, p. 391-418. DOI: [10.1007/BF02463257](https://doi.org/10.1007/BF02463257)
- [AOP1] M. Alcheik, P. Orro et F. Pelletier, *Singularités de l'application extrémités pour les distributions régulières*, Actes du colloque Singularités et Géométrie sous-riemannienne, Travaux en cours 62, Hermann (2000), p. 11-39.
- [BT1] K. Bekka, D. Trotman, *Propriétés métriques de familles  $\Phi$ -radiales de sous-variétés différentiables*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 305 (1987), p. 389-392.
- [BT2] K. Bekka, D. Trotman, *Sur les propriétés métriques de espaces stratifiés*, Prépublication 1995-01, U.R.A. 0225, Université de Provence.

- [Can] J. Canny, A new algebraic method for robot-motion-planning and real geometry, Proceedings of the 28th IEEE Symposium on the Foundations of Computer Science, Los Angeles, 1987, 39-48.
- [Com] G. Comte, Densité et Images Polaires en Géométrie Sous-analytique, Thèse, Université de Provence, Décembre 1998.
- [Ac] D. d'Acunto, Valeurs critiques asymptotiques de fonctions définissables dans une structure o-minimale, preprint Univ. Savoie, July 1999.
- [DKO] S. T. Dinh, K. Kurdyka et P. Orro, Gradient horizontal de fonctions polynomiales', Annales de l'Institut Fourier, vol 59, n°5 (2009), p. 1999-2042
- [Fed] H. Federer, Geometric measure theory, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [FFW] M. Ferrarotti, E. Fortuna et L. Wilson, Real algebraic varieties with prescribed tangent cones, Pacific J. of Math., 194 (2000), 315-323.
- [Fer2] M. Ferrarotti and L. C. Wilson, Generalized Hestenes lemma and extension of functions, à paraître dans Trans. of the A.M.S.
- [GMP] M. Goresky et R. MacPherson, Stratified Morse theory, Springer Verlag, Berlin, 1987.
- [Gro] M. Gromov, Carnot-Caratheodory Spaces seen from Within, Sub-Riemannian geometry, Prog. Math. 144, Birkhäuser, Basel (1996), p. 79-323.
- [HM1] J. P. G. Henry et M. Merle, Limites de normales, conditions de Whitney et éclatement d'Hironaka, Proc. A. M. S. Summer Institute on singularities, Arcata, 1981.
- [HM2] J. P. G. Henry et M. Merle, Stratifications de Whitney d'un ensemble sous-analytique, C.R.A.S., t. 308, Série I, p.357-360, 1989
- [Hir] H. Hironaka, Normal cones in analytic Whitney stratifications, Publ. Math. I.H.E.S. 36 (1969), 127-138. DOI: [10.1007/BF02684601](https://doi.org/10.1007/BF02684601)
- [J1] S. Jacquet, Distance sous-riemannienne et sous-analyticité, Thèse, 1998.
- [J2] S. Jacquet, Subanalyticity of the subriemannian distance, Journal of dynamical and control systems, 5, 1999, 303-328. DOI: [10.1023/A:1021762416005](https://doi.org/10.1023/A:1021762416005)
- [KT] A. Kambouchner, D. Trotman, Whitney (a) faults which are hard to detect, Annales de l'ENS, 4 ème série, tome 12, numéro 4 (1979), p. 465-471.
- [KO] K. Kurdyka et P. Orro, *Distance géodésique sur un sous-analytique*, Rev. Mat. Univ. Comp. de Madrid, vol. 10, num. suppl. 1997, p. 173-182.
- [KOS] K. Kurdyka, P. Orro et S. Simon, *Semialgebraic Sard theorem for generalized critical values*, Journal of Differential Geometry, vol. 56 - num. 1 (2000), 67-92.
- [Kuo] T.-C. Kuo, The ratio test for analytic Whitney stratifications, Liverpool Singularities Symposium I, Lecture Notes in Math., 192, Springer (1971), 141-149.
- [KR] K. Kurdyka et G. Raby, Densité des ensembles sous-analytiques, Annales de l'Institut Fourier, Tome 39, 1989, p. 753-771. DOI: [10.5802/aif.1186](https://doi.org/10.5802/aif.1186)
- [KwT] M. Kwiniński et D. Trotman, Scribbling continua in  $\mathbb{R}^n$  and constructing singularities with prescribed Nash fibre and tangent cone, Topology Appl. 64, No.2, 177-189 (1995). DOI: [10.1016/0166-8641\(94\)00090-P](https://doi.org/10.1016/0166-8641(94)00090-P)
- [LT] Lê D.T. et B. Teissier, Cycles évanescents et conditions de Whitney II, Proc. Sympos. Pure Math., Providence 1983, Part 2, 65-103.
- [Loj] S. Lojasiewicz, Stratifications et triangulations sous-analytiques, Seminari di Geometria (Bologna), (1986) 83-97
- [NT] V. Navarro-Aznar et D. Trotman, Whitney regularity and generic wings, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 31 (1981), 87-111. DOI: [10.5802/aif.830](https://doi.org/10.5802/aif.830)
- [O1] P. Orro, *Fonctions de Morse, conditions de régularité : un contre exemple*, C. R. A. S t. 296, série I, 1983, p. 561-564.
- [O2] P. Orro, *Conditions de régularité, espaces tangents et fonctions de Morse sur les espaces stratifiés*, Thèse, Orsay, 1984.
- [O3] P. Orro, *Espaces conormaux et densité des fonctions de Morse*, C. R. A. S t. 305, Série I, 1987, p. 269-272
- [O4] P. Orro, *Tangents limites, cône de Whitney et régularité par intersection*, Annales de l'Institut Fourier, Tome 40, Fascicule 3, 1990, p. 739-756.

- [O5] P. Orro, *Quelques propriétés de la distance géodésique*, Real analytic and complex singularities, Pitman Res. Notes in Math. , num. 381, 1998, p. 107-113.
- [OT1] P. Orro et D. Trotman, *Sur les fibres de Nash de surfaces à singularités isolées*, C. R. A. S t. 299, Série I, 1984, p. 397-399.
- [OT2] P. Orro et D. Trotman, *On the regular stratifications and conormal structure of subanalytic sets*, B. L. M. S. 18 (1986), p. 185-191
- [OT3] P. Orro et D. Trotman, *Cône normal à une stratification régulière*, Semin. di Geometria 1998-1999, Univ. Studi Bologna (2000), p. 169-175.
- [OT4] P. Orro et D. Trotman, *Cône normal et conditions de Kuo-Verdier*, Bulletin de la Société mathématique de France, 130 (2002), 71-85.
- [P] R. Pignoni, Density and stability of Morse functions on a stratified space, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) 6 (1979), 593-608.
- [Sus1] H. Sussmann, Subanalytic sets and feedback control, J. of Diff. Equ. 31, 31-52 (1979). DOI: [10.1016/0022-0396\(79\)90151-7](https://doi.org/10.1016/0022-0396(79)90151-7)
- [Sus2] H. Sussmann, Subanalyticity of the distance function for real analytic sub-Riemannian metrics on three dimensional manifolds, Report SYCON-91-05a, Rutgers, 1991.
- [Tam] M. Tamm, Subanalytic sets in the calculus of variation, Acta Math. 146, 167-199 (1981). DOI: [10.1007/BF02392462](https://doi.org/10.1007/BF02392462)
- [Tei] B. Teissier, Variétés polaires II, Algebraic geometry, La Rabida, 1981, L.N.M. 961.
- [T] D. Trotman, Equisingularité et conditions de Whitney, Thèse d'Etat, Université de Paris-Sud, Orsay, janvier 1980.
- [T1] D. Trotman, Counterexamples in stratification theory : two discordant horns, Real and Complex Singularities (Proc. 9th Nordic Summer School, Oslo 1976, ed. P. Holm), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, (1977), 679-686.
- [T2] D. Trotman, On Canny's roadmap algorithm : orienteering on semialgebraic sets (an application of singularity theory to theoretical robotics), Proceedings of the 1989 Warwick Singularity Theory Symposium (éd. D. Mond et J. Montaldi), Springer Lecture Notes, 1991, 320-339.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE SAVOIE, CAMPUS SCIENTIFIQUE, 73376 LE BOURGET-DU-LAC CEDEX, FRANCE.

*E-mail address:* [patrice.orro@univ-savoie.fr](mailto:patrice.orro@univ-savoie.fr)